Кликунов Н.Д.

Модифицированная дюрация как эластичность цены актива по процентной ставке: критика подхода

// Провинциальные научные записки, 2017. № 2 (6), С. 23-27 (ISSN 2411-0736)

Идея модифицированной дюрации тесно связана с понятием эластичности. Эластичность эндогенной переменной Y от экзогенной переменной X при фиксированности других экзогенных факторов представляет собой следующее соотношение:

$$\varepsilon_{(Y,X)} = \frac{\partial Y}{\partial X}\frac{X}{Y},$$

Если зафиксировать в пространстве точку X, и соответственно Y, то эластичность представляет собой деление производной функции на среднее значение функции. Эластичность сопоставить прирост функции с её средним значением.

Эластичность представляет собой реакцию функции на изменение аргумента, представленную в безмерной форме. Чем выше значение эластичности, тем выше реакция процентного изменения эндогенной величины на процентное изменение экзогенного параметра.

В финансовом менеджменте идея эластичности находит свое выражение в понятии модифицированной дюрации. В качестве экзогенной переменной выступает процентная ставка (*i – interest),* в качестве эндогенной переменной – приведенная ценность актива (*PV – present value*)

Если рассматривать приведенную ценность актива как функцию от трех переменных $PV = \sum PV_k = \sum \frac{CV_k}{(1+i)^k}$, где k – период в котором осуществляется выплата, CV – current value – текущее значение выплаты, i - ставка процента, определяющая ценность денег между периодами и зафиксировать параметры k и CV, то производная функции по процентной ставке будет выглядеть как

$$\frac{\partial PV}{\partial i} = \left(\frac{-1}{(1+i)}\right)\sum_{k=1}^{k=n} k * CV_k * (1+i)^{-k}$$

, а соответственно значение эластичности функции PV по процентной ставке i можно представить как

$$\varepsilon(PV,i) = \left(\frac{-i}{(1+i)}\right)\frac{\sum_{k=1}^{k=n} k * PV_k}{\sum_{k=0}^{k=n} PV_k},$$

Довольно часто это значение эластичности в финансовом менеджменте определяют как понятие «модифицированная дюрация» и обозначают как modD. Следует отметить, что простая дюрация [] модифицированная дюрация связаны между собой следующим соотношением:

$$\operatorname{mod} D = \left(\frac{-i}{(1+i)}\right) * D$$

Интерпрерация понятия модифицированная дюрация достаточно простая и весьма полезная для финансовой практики:

Модифицированная дюрация показывает на сколько процентов увеличится ценность актива при снижении процентной ставки на один процент и vice versa.

Однако данное положение работает для относительно небольших изменений экзогенного параметра. Так как в основе формулы эластичности лежит идея линейных приращений, а функция приведенной ценности актива от процентной ставки таковой не является.

Чтобы проиллюстрировать определенную некорректность идеи модифицированной дюрации можно разложить функцию приведенной стоимости актива по формуле Тейлора:

Формула Тейлора позволяет точно определить приращение функции при приращении ее аргумента при условии сходимости ряда [1]:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f^{'}(x_0) * \Delta x + f^{''}(x_0) / 2! * (\Delta x)^2 + ... + f^{n}(x_0) / n! * (\Delta x)^n,$$

Где n – максимальное количество производных которое можно взять у функции, n может стремиться к бесконечности. Для условия сходимости формулы Тейлора к определенному значению должно выполняться несколько важных свойств, но для нашей функции приведенной стоимости актива от процентной ставки, являющейся по сути примером геометрического ряда [2], они выполняются.

Первая и вторая производные функции $PV = \sum PV_k = \sum \frac{CV_k}{(1+i)^k}$ будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial PV}{\partial i} = \sum_{k=1}^{k=n} - k * CV_k * (1+i)^{-(k+1)} < 0$$

$$\frac{\partial^2 PV}{(\partial i)^2} = \sum_{k=1}^{k=n} k * (1+k) * CV_k * (1+i)^{-(k+2)} > 0$$

Таким образом, можно констатировать, что данная функция является убывающей и выпуклой вниз [3]. Выпуклость вниз означает, что значение эластичности, которая связана только со значением первой производной, будет несколько недооценивать реакцию функции на изменение процентной ставки.

Причем, чем более значительным будет изменение процентной ставки тем в большей степени значение модифицированной дюрации будет давать нам искаженный результат

Для иллюстрации данного положения рассчитаем значение модифицированной дюрации для облигацию со следующими параметрами - восьмилетний срок погашения, купонные выплаты равные 3, цена погашения равная 100 и процентной ставкой - 5%.

Таблица 1. Расчет значения дюрации и модифицированной дюрации облигации с восьмилетним сроком погашения, купонными выплатами равными 3, ценой погашения равной 100 и процентной ставкой равной 5%.

i=	5%		
k	CV	PV	k*PV
1	3	2,857143	2,857143
2	3	2,721088	5,442177
3	3	2,591513	7,774538
4	3	2,468107	9,87243
5	3	2,350578	11,75289
6	3	2,238646	13,43188
7	3	2,132044	14,92431
8	103	69,71445	557,7156
Сумма:		87,07357	623,771
Дюрация:		7,164	
Модифицированная дюрация		**-0,35801**	

Значение модифицированной дюрации говорит нам о том, что если процентная ставка вырастет, например, на 60%, т.е. с 5% до 8%, то чистая приведенная стоимость облигации снизится на 21,48% (=60%*-0,35801) и станет равна

$$PV(0,08) = 87,07 * (1 - 0,2148) = 69,252$$

(расчеты производятся в Excel и из него же копируются ответы, а в формуле приводятся округленные значения, что может приводить к незначительной итоговой погрешности)

Однако если мы воспользуемся формулой Тейлора и рассчитаем изменение стоимости облигации прямым образом, рассчитав значения с учетом второй производной, то мы получим

$$PV(0,05+0,03) = PV(0,05) + PV^{'}(0.05) * 0,03 + PV^{''}(0,05) * 0,0.3^{2} / 2! = 71,458$$

Данные расчета первой и второй производной функции приведенной стоимости облигации от процентной ставки представлены в таблице:

Таблица 2. Расчет значений функции PV, ее первой и второй производной для облигации с восьмилетним сроком погашения, купонными выплатами равными 3, ценой погашения равной 100 и процентной ставкой равной 5%.

i=	5%			
k	CV	PV	dPV/di	d^2(PV)/(di)^2
1	3	2,857143	-2,72	5,18
2	3	2,721088	-5,18	14,81
3	3	2,591513	-7,40	28,21
4	3	2,468107	-9,40	44,77
5	3	2,350578	-11,19	63,96
6	3	2,238646	-12,79	85,28
7	3	2,132044	-14,21	108,29
8	103	69,71445	-531,16	4552,78
Сумма:		87,07357	-594,07	4903,29

Формула Тейлора с учетом влияния второй производной предсказывает, что приведенная стоимость облигации снизится всего на 17,93%. Это расхождения с предсказаниями, сделанными на основе модифицированной дюрации, объясняется выпуклостью функции приведенной стоимости от процентной ставки [подробнее 4].

Для полной ясности рассчитаем напрямую значение приведенной стоимости облигации при процентной ставке равной 8%

Таблица 3. Расчет значений функции PV для облигации с восьмилетним сроком погашения, купонными выплатами равными 3, ценой погашения равной 100 и процентной ставкой равной 8%.

i=	8%	
k	CV	PV
1	3	2,777778
2	3	2,572016
3	3	2,381497
4	3	2,20509
5	3	2,04175
6	3	1,890509
7	3	1,750471
8	103	55,6477
Сумма:		71,26681

Таким образом, истинное значение стоимости актива при изменении процентной ставки с 5% до 8% составит 71,27.

Математическое моделирование показывает увеличивающуюся погрешность при использовании модифицированной дюрации при увеличении изменения процентных ставок. В таблице 4 приведены отклонения и ошибка в вычислениях истинной стоимости актива при использовании модифицированной дюрации и формулы Тейлора

Таблица 4. Расчет отклонений PV от истинного значения для облигации с восьмилетним сроком погашения, купонными выплатами равными 3, ценой погашения равной 100 и первоначальной процентной ставкой равной 5 %.

Изменение процентной ставки до:	8%		10%		12%	
	Значение	Отклонение от истинного значения (%)	Значение	Отклонение (%)	Значение	Отклонение (%)
Истинное значение PV	71,27	0,0%	62,66	0,0%	55,29	0,0%
Значение PV, рассчитанное с помощью модифицированной дюрации	69,25	-2,8%	57,37	-8,4%	45,49	-17,7%
Значение PV, рассчитанное с помощью формулы Тейлора	71,46	0,3%	63,50	1,3%	57,50	4,0%

Моделирование, сделанное в Excel, показывает, что значение PV, рассчитанное с помощью модифицированной дюрации дает заниженную оценку стоимости актива и ошибка в оценке увеличивается по мере увеличения волатильности

Значение PV, рассчитанное с помощью формулы Тейлора, завышает ожидаемую стоимость актива, и ошибка в оценке меньше

Следуем признать, что использование формулы Тейлора или учет выпуклости функции приведенной стоимости актива от процентной ставки дают исследователю более корректное представление о характере влияния процентной ставки на стоимость актива. Использование модифицированной дюрации для расчета ожидаемой стоимости актива валидно только при незначительных колебаниях процентной ставки

Использованные источники:

1. Формула Тейлора // https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%A2%D0%B5%D0%B9%D0%BB%D0%BE%D1%80%D0%B0
2. Geometric series // https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_series
3. Выпуклая функция // https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D0%BF%D1%83%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F
4. Дюрация, выпуклость функции в курсе Finance theory I // https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-401-finance-theory-i-fall-2008/