Кликунов Н.Д.

Модифицированная дюрация срочных и бессрочных аннуитетов

// Провинциальные научные записки, 2017. № 1(5), С. 14-18 (ISSN 2411-0736)

Аннуитет представляет собой поток равномерных реальных платежей, осуществляемый с заранее оговоренной периодичностью в течение определенного времени [1]. Обычно в качестве периода выступают неделя, месяц, квартал, полугодие или год.

Если платежи осуществляются в начале периода, то данный аннуитет называют пренумерандо, если в конце периода, то постнумерандо [3]. В данной статье все рассуждения будут строиться в логике постнумерандо. Однако переход от постнумерандо к пренумерандо осуществляется простым математических преобразованием:

$$PV_{пренумерандо} = PV_{постнумерандо} * (1+i), \tag{1}$$

где

PV – приведенная к настоящему моменту ценность (стоимость) аннуитетных платежей

i – реальная процентная ставка за период времени

Если аннуитет выплачивается в течение определенного срока, то он называется срочным аннуитетом. Существуют и бессрочные аннуитеты. В этом случае платежи осуществляются вечно [3].

Если реальный платеж представляет собой А, то чистая приведенная ценность (стоимость) срочного аннуитета представляет собой сумму геометрического ряда с нормой дисконта равной δ и количеством периодических выплат равным N

$$PV = A*(\delta + \delta^2 + ... + \delta^N) = A*(\frac{\delta - \delta^{(N+1)}}{1-\delta}), \tag{2}$$

где $\delta = \frac{1}{1+i}$ и А – значение реального аннуитетного платежи

Если использовать непосредственно реальную процентную ставку вместо нормы дисконта, то формула ценности аннуитета будет выглядеть как

$$PV = A*\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i*(1+i)^N}\right) = A*\left(\frac{(1+i)^N - 1}{i*(1+i)^N}\right) \qquad (3)$$

Следует обратить внимание, что если количество периодов в течении которых осуществляются равномерные выплаты стремится к бесконечности, то формула ценности аннуитета сводится к $PV = \frac{A}{i}$ для случая постнумерандо.

Модифицированная дюрация представляет собой эластичность функции приведенной стоимости по процентной ставке:

$$\varepsilon_{(PV,i)} = \left(\frac{\partial PV}{\partial i}\right)*\left(\frac{i}{PV}\right) \qquad (4)$$

Для определения значения эластичности или модифицированной дюрации актива, порождающего аннуитетные платежи нужно взять производную функции приведенной стоимости актива по процентной ставке

$$\frac{\partial PV}{\partial i} = A*(-i^{-2} - (-i^{-2}*(1+i)^{-N} - N*i^{-1}*(1+i)^{-(N+1)}) = A*\left(\frac{-(1+i)^{(N+1)} + (1+i) + N*i}{i^2*(1+i)^N*(1+i)}\right) \qquad (5)$$

Получив значение производной мы можем определить формулу модифицированной дюрации для актива, порождающего срочный аннуитет:

$$D_{\mathrm{mod}} = A*\left(\frac{-(1+i)^{(N+1)} + (1+i) + N*i}{i^2*(1+i)^N*(1+i)}\right)*\frac{i*i*(1+i)^N}{A*((1+i)^N - 1)} =$$

$$-\left(\frac{(1+i)^{(N+1)} - (1+i) - N*i}{(1+i)^{(N+1)} - (1+i)}\right) = -\left(1 - \frac{N*i}{(1+i)^{(N+1)} - 1 - i}\right) \qquad (6)$$

Следует обратить внимание, что при $N \to \infty$, значение эластичности функции приведенной стоимости от процентной ставки или модифицированной дюрации актива, порождающего аннуитетные платежи стремиться к минус единице, что собственно также следует из формулы бессрочного аннуитета. Производная стоимости бессрочного аннуитета по процентной ставке будет равна

$$\frac{\partial PV}{\partial i} = \frac{-A}{i^2} \qquad (7)$$

Откуда следует, что эластичность функции бессрочного аннуитета по процентной ставке равна:

$$\varepsilon(PV,i) = D_{\text{mod}} = \left(\frac{-A}{i^2}\right) * \left(\frac{i*i}{A}\right) = -1 \qquad (8)$$

Если же срочный аннуитет представляется собой лишь одну выплату через определенный период времени при процентной ставке i, что юридически будет представлять собой ценную бумагу под названием вексель, то значение модифицированной дюрации в этом случае составит:

$$\varepsilon(PV,i) = D_{\text{mod}} = -\left(1 - \frac{i}{(1+i)^2 - 1 - i}\right) = -\left(\frac{i}{1+i}\right) \qquad (9)$$

Таким образом, значение эластичности ценности аннуитета по процентной ставке варьируется по модулю от значения процентной ставки до единицы. Причем увеличение числа выплат увеличивает значение дюрации по модулю [2].

Определенный интерес представляет расчет зависимости значения модифицированной дюрации от числа периодов и значения реальной процентной ставки.

Моделирование данного процесса в программе Excel дает следующие значения для i=3%; 4%; 5%; 8%; 10%; 12%; 15%

Таблица 1. Зависимость значения модифицированной дюрации от числа периодов аннуитетных выплат и изменения процентных ставок

	i- процентная ставка в год						
Число периодов (лет)	3%	4%	5%	8%	10%	12%	15%
1	-0,029	-0,038	-0,048	-0,074	-0,091	-0,107	-0,130
3	-0,058	-0,076	-0,094	-0,144	-0,176	-0,206	-0,249
5	-0,086	-0,112	-0,138	-0,211	-0,255	-0,297	-0,355
10	-0,153	-0,199	-0,243	-0,361	-0,430	-0,491	-0,572
20	-0,277	-0,354	-0,424	-0,595	-0,683	-0,752	-0,830
25	-0,334	-0,423	-0,501	-0,683	-0,769	-0,833	-0,898
50	-0,570	-0,685	-0,773	-0,919	-0,961	-0,981	-0,994
100	-0,840	-0,922	-0,964	-0,997	-0,999	-1,000	-1,000

Таблица дает оценку процентного изменения стоимости актива порождающего срочный аннуитет в зависимости от процентного изменения процентной ставки. Например, для 10-летнего аннуитета значения модифицированной дюрации по модулю выглядят следующим образом (см. рис.1):

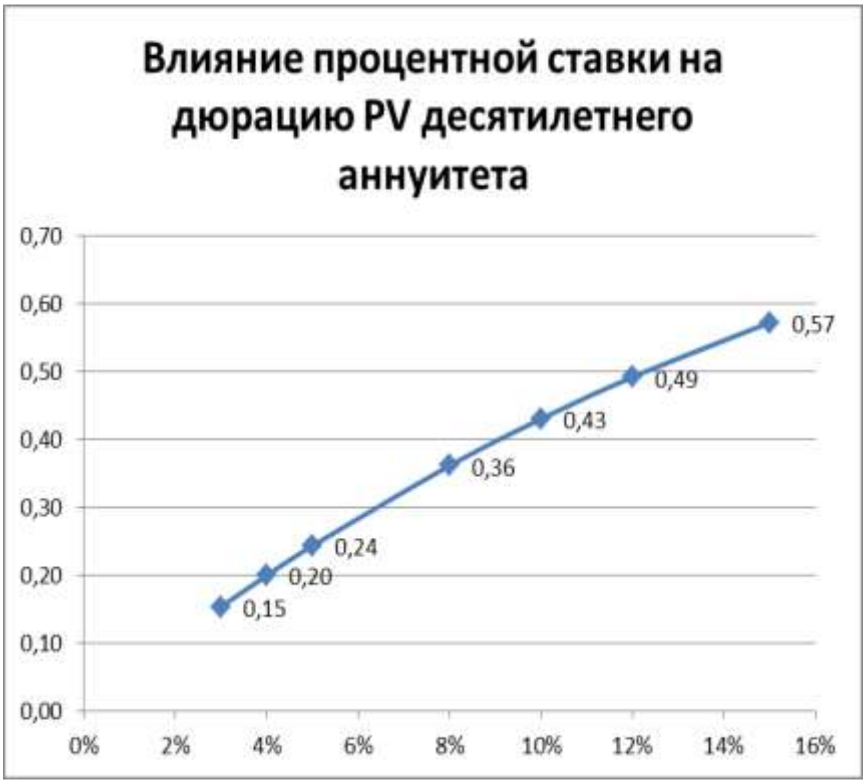

Рис. 1. Изменения значения модифицированной дюрации в зависимости от ставки процента

В случае десятилетним аннуитетом (счет постнумерандо) это приводит к тому, что чем выше изначально была процентная ставка, тем большее влияние на изменение цены аннуитета оказывает изменение самой процентной ставки. В таблице 2 приведены оценки влияния 10% изменения процентных ставок на цену десятилетнего аннуитета

Таблица 2. Ожидаемое процентное изменение стоимости десятилетнего аннуитета при повышении процентных ставок на 10%

Старая процентная ставка	3%	4%	5%	8%	10%	12%	15%
D(mod)	0,15	0,20	0,24	0,36	0,43	0,49	0,57
Новая процентная ставка	3,3%	4,4%	5,5%	8,8%	11,0%	13,2%	16,5%
% изменение PV десятилетнего аннуитета	-0,5%	-0,9%	-1,3%	-3,2%	-4,7%	-6,5%	-9,4%

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1.Значение модифицированной дюрации аннуитета лежит в пределах от -1 до $-\left(\frac{i}{1+i}\right)$

2. При неизменности процентных ставок и размеров выплат увеличение сроков аннуитетных выплат приводит к увеличению значения дюрации по модулю

3. Изменение цены аннуитета от изменения процентной ставки зависит от изначального значения процентной ставки. Чем выше изначальное значение, тем сильнее влияние изменения процентной ставки на цену аннуитета. Изменение временной структуры процентных ставок сильнее сказывается на аннуитетах с более длительными сроками выплат

Список использованных источников:

1. Аннуитет // https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%BD%D1%83%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%82 (дата обращения 15.12.2016)
2. Бэртон Дж. Мэкиел. Временная структура процентных ставок.// Финансы [Текст]. Под ред. Дж. Итуэлла, М. Милгейта, П. Ньюмена. – М.:Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. – 423 С.
3. Пренумерандо и постнумерандо аннуитеты // http://studme.org/150609139045/ekonomika/annuitety (дата обращения 15.12.2016)